
QUELQUES REMARQUES À PROPOS D'UN THÉORÈME DE CHECCOLI

par

Hugues Bauchère

Résumé. — Dans sa thèse (cf. [Che10]), S. Checcoli montre, entre autres résultats, que si K est un corps de nombres et si L/K est une extension galoisienne infinie de groupe de Galois G d'exposant fini, alors les degrés locaux sur L sont uniformément bornés en toutes les places de K . Dans cet article nous rassemblons deux remarques à propos de la généralisation du résultat de S. Checcoli aux corps de fonctions de caractéristique positive. D'une part nous montrons un analogue de son théorème dans ce cadre, sous l'hypothèse que l'exposant du groupe de Galois soit premier à p . D'autre part, nous montrons à l'aide d'un exemple que cette hypothèse est en fait nécessaire.

Abstract (Some Remarks About a Checcoli Theorem)

In his thesis (cf. [Che10]), S. Checcoli shows that, among other results, if K is a number field and if L/K is an infinite Galois extension with Galois group G of finite exponent, then L has uniformly bounded local degrees at every prime of K . In this article we gather two remarks about the generalisation of S. Checcoli's result to function fields of positive characteristic. We first show an analogue of her theorem 2.2.2 in this context, under the hypothesis that the Galois group exponent is prime to p . Using an example, we then show that this hypothesis is in fact necessary.

Sommaire

Introduction	2
1. Analogie du théorème 1 en caractéristique positive ..	2

Mots clefs. — function field, positive characteristic, class field theory.

2. Un contre-exemple en caractéristique positive	4
Remerciements	12
Références	12

Introduction

Soient K un corps global⁽¹⁾ et L/K une extension galoisienne infinie. On dit que l'extension L/K a ses degrés locaux *uniformément bornés* en toutes (resp. en presque toutes⁽²⁾) les places de K s'il existe un entier $d_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour toutes (resp. presque toutes) les places v de K , on a $[L_w : K_v] \leq d_0$ pour toute place $w|v$ de L .

Dans sa thèse S. Checcoli démontre entre autres résultats le théorème suivant (cf. th. 2.2.2 de [Che10]) :

Théorème 1. — *Soit K un corps de nombres et L/K une extension galoisienne infinie. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *l'extension L/K a ses degrés locaux uniformément bornés en toutes les places de K ;*
2. *l'extension L/K a ses degrés locaux uniformément bornés en presque toutes les places de K ;*
3. *le groupe de Galois de l'extension L/K est d'exposant fini.*

Ensuite S. Checcoli et P. Dèbes (cf. [CD13]) ont généralisé ce résultat à certaines classes de corps de fonctions.

Une question naturelle est donc de savoir si ce résultat est encore vrai dans le cadre des corps de fonctions en caractéristique positive. Nous montrons ici un analogue du théorème 1 en supposant de plus que l'exposant est premier à la caractéristique. Cette hypothèse n'est utile que dans la démonstration de l'implication $3 \implies 1$. Nous donnons ensuite un exemple illustrant la nécessité de cette hypothèse.

1. Analogie du théorème 1 en caractéristique positive

Nous reprenons la preuve du théorème 1 en lui apportant les modifications nécessaires dans notre cadre : celui d'une extension finie K de $k := \mathbb{F}_q(T)$. Nous commençons par rappeler la définition suivante.

-
1. *i.e.* un corps de nombres ou une extension finie de $\mathbb{F}_q(T)$.
 2. *i.e.* en toutes sauf un nombre fini.

Définition 1.1. — Soit G un groupe. On dit que G est un *groupe métacyclique* s'il existe un sous-groupe normal H de G tel que H et G/H soient cycliques.

Remarque 1.2. — Si G est un groupe fini métacyclique d'exposant b , alors G est d'ordre un diviseur de b^2 .

Nous pouvons maintenant énoncer un analogue en caractéristique positive du théorème 1.

Théorème 1.3. — Soient K/k une extension finie et L/K une extension galoisienne infinie. Si les degrés locaux de l'extension L/K sont uniformément bornés en presque toutes les places de K , alors $\text{Gal}(L/K)$ est d'exposant fini.

Réciproquement, si $\text{Gal}(L/K)$ est d'exposant fini premier à la caractéristique de K , alors les degrés locaux de l'extension L/K sont uniformément bornés en toutes les places de K .

Démonstration. — Supposons que presque toutes les places de K aient leurs degrés locaux sur L bornés par $d_0 \in \mathbb{N}$. Soit S l'ensemble des places de K dont le degré local sur L n'est pas borné par d_0 . Alors, par hypothèse, S est un ensemble fini. Soient E/K une extension galoisienne finie incluse dans L et $\sigma \in \text{Gal}(E/K)$. D'après le théorème de densité de Tchebotarev (cf. th. 9.13A de [Ros02]), il existe une place finie $\mathfrak{p} \in \mathcal{M}_K \setminus S$ non ramifiée sur E telle que σ appartient à la classe de conjugaison d'Artin de \mathfrak{p} dans $\text{Gal}(E/K)$ (rappelons que d'après le corollaire 3.5.5 de [Sti09], comme l'extension E/K est séparable finie, presque toutes les places de K sont non ramifiées dans E). Ainsi, si \mathfrak{q} est une place de E au-dessus de \mathfrak{p} , il existe un conjugué $\eta \in \text{Gal}(E/K)$ de σ qui engendre le groupe de décomposition de \mathfrak{q} sur \mathfrak{p} qui est cyclique (d'après le théorème 3.8.2 de [Sti09]) et isomorphe à $\text{Gal}(E_{\mathfrak{q}}/K_{\mathfrak{p}})$, où $E_{\mathfrak{q}}$ et $K_{\mathfrak{p}}$ sont respectivement les complétés des corps E et K en \mathfrak{q} et \mathfrak{p} . Or, par hypothèse, $\#(\text{Gal}(E_{\mathfrak{q}}/K_{\mathfrak{p}})) \leq d_0$, ainsi $\sigma^{d_0!} = \eta^{d_0!} = \text{id}$ et donc $\text{Gal}(E/K)$ est d'exposant borné par $d_0!$. Comme $\text{Gal}(L/K)$ est la limite projective de la famille $\{\text{Gal}(E/K)\}_E$ indexée par les extensions galoisiennes finies de K contenues dans L , le groupe $\text{Gal}(L/K)$ est d'exposant borné par $d_0!$.

Réciproquement, supposons que $\text{Gal}(L/K)$ soit d'exposant fini $b \in \mathbb{N}$ premier à p , la caractéristique de K . Écrivons L comme une réunion croissante d'extensions galoisiennes finies L_j/K de groupe de Galois G_j . Soit w une place de L , pour chaque j on note v_j l'unique place de L_j en-dessous de w et L_{j,v_j} le complété de L_j en la place v_j . De même, on note v l'unique place de K en-dessous de w et K_v le complété de K en la place v . On rappelle que pour tout j , le quotient du groupe de décomposition par le groupe d'inertie de v_j sur v est isomorphe au groupe de Galois des corps résiduels et qu'il est donc cyclique (engendré par le Frobenius). On rappelle également que le groupe $\text{Gal}(L_{j,v_j}/K_v)$ est isomorphe au groupe de décomposition de v_j sur v qui est un sous-groupe de G_j . Donc $\text{Gal}(L_{j,v_j}/K_v)$ est d'exposant un diviseur de b . De plus, comme b est premier à p , il ne peut y avoir de ramification sauvage. Il y a donc deux cas possibles pour l'extension $L_{j,v_j}/K_v$:

1. si l'extension $L_{j,v_j}/K_v$ est non ramifiée, alors, $\text{Gal}(L_{j,v_j}/K_v)$ est cyclique d'ordre un diviseur de b ;
2. si l'extension $L_{j,v_j}/K_v$ est modérément ramifiée, alors d'après la proposition 3.8.5 de [Sti09], le groupe d'inertie de v_j sur v est cyclique, tout comme le quotient du groupe de décomposition par le groupe d'inertie, ainsi $\text{Gal}(L_{j,v_j}/K_v)$ est métacyclique et donc d'ordre un diviseur de b^2 .

Pour tout j , le degré de l'extension $L_{j,v_j}/K_v$ est donc un diviseur de b^2 . On obtient donc le résultat souhaité par passage à la limite projective. \square

2. Un contre-exemple en caractéristique positive

Dans le théorème 1.3, on a vu que si $\text{Gal}(L/K)$ est d'exposant fini premier à la caractéristique de K , alors les degrés locaux de l'extension L/K sont uniformément bornés en toutes les places de K . Dans cette partie nous allons donner un contre-exemple dans le cas où l'exposant du groupe $\text{Gal}(L/K)$ est divisible par p . Soit \mathcal{P} l'ensemble des polynômes irréductibles et unitaires de $\mathbb{F}_q[T]$. Alors l'ensemble $\mathcal{P} \cup \{\frac{1}{T}\}$ est en bijection avec l'ensemble \mathcal{M}_k des places de $k := \mathbb{F}_q(T)$. Si $a \in \mathcal{P} \cup \{\frac{1}{T}\}$, on note $v_a : k \rightarrow \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ la valuation associée à a et k_{v_a} le complété de k en v_a . Si E est une extension finie de k et si w est une place de E

qui prolonge v_a , on normalise (exceptionnellement ici) w par la formule $w(\alpha) = v_a(\alpha)$ pour tout $\alpha \in k$. On a donc :

$$w(E) = \frac{1}{e} \mathbb{Z} \cup \{\infty\},$$

où $e := e(w/v_a)$ est l'indice de ramification de w sur v_a .

Lemme 2.1. — Soient $a \in \mathcal{P} \cup \{\frac{1}{T}\}$ et $i \in \mathbb{N} \setminus p\mathbb{N}$. On pose :

$$P_{a,i}(X) := X^p - X - a^{-i}.$$

Soit $\theta_{a,i} \in \bar{k}$ une racine de $P_{a,i}$. On a les propriétés suivantes :

1. toutes les racines de $P_{a,i}$ sont de la forme $\theta_{a,i} + \zeta$ avec $\zeta \in \mathbb{F}_p$;
2. $w(\theta_{a,i}) = -\frac{i}{p} \notin \mathbb{Z}$ pour toute place $w|v_a$ de $k(\theta_{a,i})$;
3. le polynôme $P_{a,i}$ est irréductible sur k ;
4. l'extension $k(\theta_{a,i})/k$ est totalement ramifiée au-dessus de a ;
5. l'extension $k(\theta_{a,i})/k$ est cyclique de degré p ;
6. $w(\theta_{a,i}) = 0$ pour tout $b \in \mathcal{P} \cup \{\frac{1}{T}\} \setminus \{a\}$ et toute place $w|v_b$ de $k(\theta_{a,i})$;
7. l'extension $k(\theta_{a,i})/k$ est non ramifiée au-dessus de toutes les places de k différentes de a .

Démonstration. — La propriété 1 est évidente. Vérifions la propriété 2. Soit $w|v_a$ une place de $k(\theta_{a,i})$. On a :

$$w(\theta_{a,i}^p - \theta_{a,i}) = v_a(a^{-i}) = -i$$

et

$$w(\theta_{a,i}^p - \theta_{a,i}) \geq \min\{p w(\theta_{a,i}), w(\theta_{a,i})\},$$

ainsi $w(\theta_{a,i}) < 0$, donc la dernière inégalité est en fait une égalité et on en déduit que $w(\theta_{a,i}) = -\frac{i}{p}$. Or $p \nmid i$ donc $w(\theta_{a,i}) \notin \mathbb{Z}$ d'où la propriété 2.

Maintenant, on a $w(\theta_{a,i}) = -\frac{i}{p} \in \frac{1}{e}\mathbb{Z}$, où $e := e(w/v_a)$ est l'indice de ramification de w sur v_a . On en déduit donc que $p|e$. Or, le polynôme $P_{a,i}$ étant de degré p , l'extension $k(\theta_{a,i})/k$ est au plus de degré p . Donc $e = p$. Les propriétés 3 à 5 s'en déduisent naturellement. Il ne nous reste donc plus qu'à montrer les propriétés 6 et 7.

$$w(\theta_{a,i}^p - \theta_{a,i}) = v_b(a^{-i}) = 0$$

et

$$w(\theta_{a,i}^p - \theta_{a,i}) \geq \min\{p w(\theta_{a,i}), w(\theta_{a,i})\},$$

ainsi $w(\theta_{a,i}) = 0$ et donc l'extension $k(\theta_{a,i})/k$ est non ramifiée au-dessus de b . \square

Dorénavant, pour alléger les notations, pour tous $a, b \in \mathcal{P} \cup \{\frac{1}{T}\}$ et tout $i \in \mathbb{N} \setminus p\mathbb{N}$, nous noterons encore v_a une extension arbitraire de v_a à $k(\theta_{b,i})$. Ainsi, nous aurons toujours :

$$v_a(\theta_{b,i}) = \begin{cases} -\frac{i}{p} \notin \mathbb{Z} & \text{si } b = a \\ 0 & \text{si } b \neq a \end{cases}.$$

Nous allons maintenant construire une p -extension abélienne élémentaire⁽³⁾ dont le degré local est infini au-dessus d'une place quelconque a de k . Pour cela, nous aurons besoin de montrer que certaines extensions sont linéairement disjointes (cf. §2.5 de [FJ08] pour ce qui concerne ces dernières) :

Lemme 2.2. — *Soit $a \in \mathcal{P} \cup \{\frac{1}{T}\}$. Alors, l'ensemble :*

$$\Lambda_{a,v_a} := \{k_{v_a}(\theta_{a,i}) \mid i \in \mathbb{N} \setminus p\mathbb{N}\}$$

forme une famille d'extensions linéairement disjointes sur k_{v_a} .

Démonstration. — L'élément a de $\mathcal{P} \cup \{\frac{1}{T}\}$ étant fixé, on simplifie les notations en posant $v := v_a$ et $\theta_i := \theta_{a,i}$ pour tout $i \in \mathbb{N} \setminus p\mathbb{N}$.

Il faut montrer que toute sous-famille finie de $\Lambda_{a,v}$ est linéairement disjointe sur k_v . Supposons par l'absurde qu'il existe une sous-famille finie $\{k_v(\theta_{i_j}) \mid j \in \{1, \dots, n\}\}$ de $\Lambda_{a,v}$ de cardinal $n \geq 2$ qui ne soit pas linéairement disjointe sur k_v . Sans perte de généralité, on peut supposer que n est minimal. L'extension $k_v(\theta_{i_n})/k_v$ étant galoisienne, on a :

$$k_v(\theta_{i_n}) \cap k_v(\theta_{i_1}, \dots, \theta_{i_{n-1}}) \neq k_v. \quad (1)$$

En effet, si ce n'était pas le cas les extensions $k_v(\theta_{i_n})$ et $k_v(\theta_{i_1}, \dots, \theta_{i_{n-1}})$ seraient linéairement disjointes sur k_v (cf. remarque suivant le corollaire 2.5.2 de [FJ08]), et donc aussi les extensions $k_v(\theta_{i_1}), \dots, k_v(\theta_{i_n})$,

3. *i.e.* une extension dont le groupe de Galois est isomorphe à un produit de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

ce qui contredit le choix de n . Comme l'extension $k_v(\theta_{i_n})/k_v$ est de degré p premier, on déduit de (1) que :

$$\theta_{i_n} \in k_v(\theta_{i_1}, \dots, \theta_{i_{n-1}}) = k_v(\theta_{i_1}, \dots, \theta_{i_{n-2}})(\theta_{i_{n-1}}). \quad (2)$$

Il existe alors $\alpha_0, \dots, \alpha_{p-1} \in k_v(\theta_{i_1}, \dots, \theta_{i_{n-2}})$ non tous nuls tels que :

$$\theta_{i_n} = \alpha_0 + \alpha_1 \theta_{i_{n-1}} + \dots + \alpha_{p-1} \theta_{i_{n-1}}^{p-1}.$$

Or $\theta_{i_n}^p = \theta_{i_n} + a^{-i_n}$ et :

$$\begin{aligned} & \left(\alpha_0 + \alpha_1 \theta_{i_{n-1}} + \dots + \alpha_{p-1} \theta_{i_{n-1}}^{p-1} \right)^p \\ &= \alpha_0^p + \alpha_1^p (\theta_{i_{n-1}} + a^{-i_{n-1}}) + \dots + \alpha_{p-1}^p (\theta_{i_{n-1}} + a^{-i_{n-1}})^{p-1}. \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} & a^{-i_n} + \alpha_0 + \alpha_1 \theta_{i_{n-1}} + \dots + \alpha_{p-1} \theta_{i_{n-1}}^{p-1} \\ &= \alpha_0^p + \alpha_1^p (\theta_{i_{n-1}} + a^{-i_{n-1}}) + \dots + \alpha_{p-1}^p (\theta_{i_{n-1}} + a^{-i_{n-1}})^{p-1}. \end{aligned}$$

Comme les éléments $1, \theta_{i_{n-1}}, \dots, \theta_{i_{n-1}}^{p-1}$ sont $k(\theta_{i_1}, \dots, \theta_{i_{n-2}})$ -linéairement indépendants, les coefficients des puissances de $\theta_{i_{n-1}}$ sont égaux dans l'égalité précédente. Ainsi, en comparant les coefficients des monômes en $\theta_{i_{n-1}}^{p-1}$, on obtient :

$$\alpha_{p-1} = \alpha_{p-1}^p,$$

d'où on déduit $\alpha_{p-1} \in \mathbb{F}_p$. En comparant les coefficients des monômes en $\theta_{i_{n-1}}^{p-2}$, on obtient :

$$\begin{aligned} \alpha_{p-2} &= \alpha_{p-2}^p + \alpha_{p-1}^p (p-1) a^{-i_{n-1}} \\ &= \alpha_{p-2}^p - \alpha_{p-1} a^{-i_{n-1}}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\alpha_{p-2}^p - \alpha_{p-2} - \alpha_{p-1} a^{-i_{n-1}} = 0.$$

On a donc deux possibilités : soit $\alpha_{p-1} = 0$ et $\alpha_{p-2} \in \mathbb{F}_p$, soit $\alpha_{p-1} \neq 0$ et $\alpha_{p-2} = \alpha_{p-1} \theta_{i_{n-1}} + \zeta$ avec $\zeta \in \mathbb{F}_p$. Or, par minimalité de n , on a $\theta_{i_{n-1}} \notin k_v(\theta_{i_1}, \dots, \theta_{i_{n-2}})$, donc $\alpha_{p-1} = 0$ et $\alpha_{p-2} \in \mathbb{F}_p$. De la même façon, on montre de proche en proche que $\alpha_{p-1} = \dots = \alpha_2 = 0$ et $\alpha_1 \in \mathbb{F}_p$. Il ne reste donc plus qu'à comparer les termes constants, *i.e.* :

$$\alpha_0 + a^{-i_n} = \alpha_0^p + \alpha_1^p a^{-i_{n-1}} = \alpha_0^p + \alpha_1 a^{-i_{n-1}}.$$

D'où

$$\alpha_0^p - \alpha_0 - a^{-i_n} + \alpha_1 a^{-i_{n-1}} = 0.$$

Deux cas s'offrent à nous :

1. $\alpha_1 = 0$ et $\alpha_0 = \theta_{i_n} + \zeta$ avec $\zeta \in \mathbb{F}_p$;
2. $\alpha_1 \neq 0$ et $\alpha_0 = \theta_{i_n} - \alpha_1 \theta_{i_{n-1}} + \zeta$ avec $\zeta \in \mathbb{F}_p$.

Dans le premier cas, on obtient :

$$\theta_{i_n} \in k_v(\alpha_0) \subseteq k_v(\theta_{i_1}, \dots, \theta_{i_{n-2}}).$$

Donc les extensions $k_v(\theta_{i_1}), \dots, k_v(\theta_{i_{n-2}})$ et $k_v(\theta_{i_n})$ ne sont pas linéairement disjointes, ce qui contredit la minimalité de n . Supposons que nous soyons dans le deuxième cas. Alors, il existe $\beta_{n-1} \in k_v(\theta_{i_1}, \dots, \theta_{i_{n-2}})$ et $\lambda_{n-1} \in \mathbb{F}_p$ tels que :

$$\theta_{i_n} = \beta_{n-1} + \lambda_{n-1} \theta_{i_{n-1}}$$

(il suffit de poser $\beta_{n-1} := \alpha_0 - \zeta$ et $\lambda_{n-1} := \alpha_1$). En reprenant le raisonnement précédent et en remplaçant pour tout $j \in \{1, \dots, n-2\}$ la relation (2) par :

$$\theta_{i_n} \in k_v(\theta_{i_1}, \dots, \theta_{i_{j-1}}, \theta_{i_{j+1}}, \dots, \theta_{i_{n-1}})(\theta_{i_j}),$$

on montre que pour tout $j \in \{1, \dots, n-1\}$, il existe $\lambda_j \in \mathbb{F}_p$ et $\beta_j \in k_v(\theta_{i_1}, \dots, \theta_{i_{j-1}}, \theta_{i_{j+1}}, \dots, \theta_{i_{n-1}})$ tels que :

$$\theta_{i_n} = \beta_j + \lambda_j \theta_{i_j}.$$

De plus, pour tout $j \in \{1, \dots, n-1\}$ on a :

$$\begin{aligned} \theta_{i_n} - \lambda_1 \theta_{i_1} - \dots - \lambda_{n-1} \theta_{i_{n-1}} \\ = \beta_j - \lambda_1 \theta_{i_1} - \dots - \lambda_{j-1} \theta_{i_{j-1}} - \lambda_{j+1} \theta_{i_{j+1}} - \dots - \lambda_{n-1} \theta_{i_{n-1}}, \end{aligned}$$

d'où

$$\theta_{i_n} - \lambda_1 \theta_{i_1} - \dots - \lambda_{n-1} \theta_{i_{n-1}} \in k_v(\theta_{i_1}, \dots, \theta_{i_{j-1}}, \theta_{i_{j+1}}, \dots, \theta_{i_{n-1}}),$$

et donc

$$\theta_{i_n} - \lambda_1 \theta_{i_1} - \dots - \lambda_{n-1} \theta_{i_{n-1}} \in \bigcap_{1 \leq j \leq n-1} k_v(\theta_{i_1}, \dots, \theta_{i_{j-1}}, \theta_{i_{j+1}}, \dots, \theta_{i_{n-1}}).$$

Or les corps $\{k_v(\theta_{i_j}) \mid j \in \{1, \dots, n-1\}\}$ étant linéairement disjoints (à nouveau par minimalité de n), on a :

$$\bigcap_{1 \leq j \leq n-1} k_v(\theta_{i_1}, \dots, \theta_{i_{j-1}}, \theta_{i_{j+1}}, \dots, \theta_{i_{n-1}}) = k_v.$$

Ainsi, il existe $\beta \in k_v$ tel que :

$$\theta_{i_n} = \beta + \lambda_1 \theta_{i_1} + \dots + \lambda_{n-1} \theta_{i_{n-1}}.$$

On en déduit que :

$$v(\beta) = v(\theta_{i_n} - \lambda_1 \theta_{i_1} - \dots - \lambda_{n-1} \theta_{i_{n-1}}). \quad (3)$$

Or $v(\theta_{i_j}) = -\frac{i_j}{p} \notin \mathbb{Z}$ pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$ d'après le lemme 2.1 et les entiers i_j sont deux à deux distincts, d'où :

$$v(\theta_{i_n} - \lambda_1 \theta_{i_1} - \dots - \lambda_{n-1} \theta_{i_{n-1}}) = \min_{1 \leq j \leq n} \{v(\theta_{i_j})\} = -\frac{1}{p} \max_{1 \leq j \leq n} \{i_j\} \notin \mathbb{Z}.$$

Donc $v(\beta) \notin \mathbb{Z}$ ce qui contredit le fait que $\beta \in k_v$. \square

Remarque 2.3. — Dans le lemme 2.2 nous n'avons fait varier que $i \in \mathbb{N} \setminus p\mathbb{N}$. Dans le cas global, on peut aussi faire varier $a \in \mathcal{P} \cup \{\frac{1}{T}\}$. Plus précisément, on peut montrer que l'ensemble :

$$\Lambda := \left\{ k(\theta_{a,i}) \mid a \in \mathcal{P} \cup \left\{ \frac{1}{T} \right\}, i \in \mathbb{N} \setminus p\mathbb{N} \right\}$$

forme une famille d'extensions linéairement disjointes sur k . La démonstration est identique à celle du lemme 2.2, à la différence qu'on considère une sous-famille finie $\{k(\theta_{a_j, i_j}) \mid j \in \{1, \dots, n\}\}$ de Λ de cardinal $n \geq 2$ qui ne soit pas linéairement disjointe sur k , avec n supposé minimal. On montre alors (cf. égalité (3)) qu'il existe $\beta \in k$ tel qu'on ait :

$$\theta_{a_n, i_n} = \beta + \lambda_1 \theta_{a_1, i_1} + \dots + \lambda_{n-1} \theta_{a_{n-1}, i_{n-1}}.$$

On en déduit que :

$$v_{a_n}(\beta) = v_{a_n}(\theta_{a_n, i_n} - \lambda_1 \theta_{a_1, i_1} - \dots - \lambda_{n-1} \theta_{a_{n-1}, i_{n-1}}).$$

Or, d'après le lemme 2.1, pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, on a :

$$v_{a_n}(\theta_{a_j, i_j}) = \begin{cases} -\frac{i_j}{p} \notin \mathbb{Z} & \text{si } a_j = a_n \\ 0 & \text{si } a_j \neq a_n \end{cases}.$$

De plus, si $a_j = a_l = a_n$, alors $i_j \neq i_l$. Donc :

$$\begin{aligned} v_{a_n}(\theta_{a_n, i_n} - \lambda_1 \theta_{a_1, i_1} - \cdots - \lambda_{n-1} \theta_{a_{n-1}, i_{n-1}}) \\ = \min_{1 \leq j \leq n} \{v_{a_n}(\theta_{a_j, i_j})\} \\ = -\frac{1}{p} \max\{i_j \mid j \in \{1, \dots, n\}, a_j = a_n\} \notin \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Donc $v_{a_n}(\beta) \notin \mathbb{Z}$ ce qui contredit le fait que $\beta \in k$. L'ensemble Λ forme donc bien une famille d'extensions linéairement disjointes sur k .

La proposition suivante nous donne un premier contre-exemple d'extension galoisienne infinie d'exposant fini ayant une place dont tous les degrés locaux sont infinis.

Proposition 2.4. — Soient $a \in \mathcal{P} \cup \{\frac{1}{T}\}$ et L_a le compositum des corps de la famille

$$\Lambda_a := \{k(\theta_{a,i}) \mid i \in \mathbb{N} \setminus p\mathbb{N}\}.$$

Si w est une place de L_a , on note $L_{a,w}$ le complété de L_a en w . Alors, l'extension L_a est une p -extension abélienne de k telle que pour toute place $w|v_a$ de L_a , l'extension $L_{a,w}/k_{v_a}$ est une p -extension abélienne infinie.

Démonstration. — Le fait que l'ensemble Λ_a forme une famille d'extensions linéairement disjointes de k et que pour toute place $w|v_a$, l'extension $L_{a,w}/k_{v_a}$ soit infinie découle directement du lemme 2.2. De plus, les extensions $k(\theta_{a,i})/k$ étant abéliennes de groupe de Galois isomorphe à $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, on en déduit que l'extension L_a est une p -extension abélienne de k . \square

Remarque 2.5. — Pour tout $b \in \mathcal{P} \cup \{\frac{1}{T}\} \setminus \{a\}$ et toute place $w|v_b$ de L_a , on a $[L_{a,w} : k_{v_b}] \leq p$. En effet, les extensions $k(\theta_{a,i})/k$ étant de degré p et non ramifiées au-dessus de b d'après le lemme 2.1, l'extension L_a/k est abélienne, d'exposant p et non ramifiée au-dessus de b . Il en est donc de même des complétés. Ainsi l'extension $L_{a,w}$ est une p -extension abélienne de k_{v_b} qui est non ramifiée au-dessus de b . Or les extensions non ramifiées d'un corps local sont cycliques (cf. prop. p. 113 de [FV93]) ce qui n'est pas le cas de l'extension $L_{a,w}/k_{v_b}$ dès que $[L_{a,w} : k_{v_b}] > p$ puisque son groupe de Galois est isomorphe à un produit de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Nous sommes maintenant en mesure de donner le contre-exemple annoncé :

Théorème 2.6. — *Soit L le compositum des corps de la famille Λ de la remarque 2.3. Alors, L est une p -extension abélienne de k dont les degrés locaux sur L sont infinis au-dessus de toutes les places de k .*

Démonstration. — Comme L est un compositum d'extensions de degré p , c'est clairement une p -extension abélienne de k . Le fait que tous les degrés locaux sur L soient infinis au-dessus des places de k provient de la proposition 2.4. En effet, si $a \in \mathcal{P} \cup \left\{\frac{1}{T}\right\}$, alors $L_a \subset L$. \square

Nous terminons cette partie en donnant un exemple d'une extension galoisienne infinie de k dont le groupe de Galois est d'exposant divisible par la caractéristique de k et dont néanmoins les degrés locaux sont uniformément bornés.

Proposition 2.7. — *Soient $i \in \mathbb{N} \setminus p\mathbb{N}$ et L_i le compositum des corps de la famille*

$$\Lambda_i := \left\{ k(\theta_{a,i}) \mid a \in \mathcal{P} \cup \left\{\frac{1}{T}\right\} \right\}.$$

Alors, L_i est une p -extension abélienne infinie de k dont les degrés locaux sont uniformément bornés par p^2 .

Démonstration. — L'extension L_i/k étant une sous-extension de l'extension L/k (cf. th. 2.6), c'est une p -extension abélienne infinie de k . Soient $a \in \mathcal{P} \cup \left\{\frac{1}{T}\right\}$ et $L_{i \setminus a}$ le compositum des corps de la famille $\Lambda_{i \setminus a} := \{k(\theta_{b,i}) \mid b \in \mathcal{P} \cup \left\{\frac{1}{T}\right\} \setminus \{a\}\}$. Alors L_i est le compositum de $k(\theta_{a,i})$ et de $L_{i \setminus a}$. Soit $w|v_a$ une place de L_i , on note encore w la restriction de w à $L_{i \setminus a}$. L'extension $k(\theta_{a,i})/k$ étant totalement ramifiée au-dessus de a , on a $[k_{v_a}(\theta_{a,i}) : k_{v_a}] = p$. D'autre part, l'extension $L_{i \setminus a}/k$ est une p -extension abélienne infinie qui est non ramifiée au-dessus de a . Or les extensions non ramifiées d'un corps local sont cycliques (cf. prop. p. 113 de [FV93]) ce qui n'est pas le cas de l'extension $L_{i \setminus a, w}/k_{v_a}$ dès que $[L_{i \setminus a, w} : k_{v_a}] > p$. On obtient donc :

$$[L_{i, w} : k_{v_a}] \leq [L_{i \setminus a, w} : k_{v_a}] [k_{v_a}(\theta_{a,i}) : k_{v_a}] \leq p^2.$$

D'où le résultat annoncé. \square

Remerciements

Je souhaite remercier Francesco Amoroso et Vincent Bosser mes directeurs de thèse ainsi que Bruno Anglès pour toutes les discussions que nous avons eues à propos de ce travail.

Références

- [CD13] S. CHECCOLI & P. DÈBES – « Tchebotarev theorems for function fields », 2013, [arXiv :1301.1815].
- [Che10] S. CHECCOLI – « On fields of algebraic numbers with bounded local degrees », Thèse, Université de Pise, 2010.
- [FJ08] M. D. FRIED & M. JARDEN – *Field arithmetic*, third éd., Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics [Results in Mathematics and Related Areas. 3rd Series. A Series of Modern Surveys in Mathematics], vol. 11, Springer-Verlag, Berlin, 2008, Revised by Jarden.
- [FV93] I. B. FESENKO & S. V. VOSTOKOV – *Local fields and their extensions*, Translations of Mathematical Monographs, vol. 121, American Mathematical Society, Providence, RI, 1993, A constructive approach, With a foreword by I. R. Shafarevich.
- [Ros02] M. ROSEN – *Number theory in function fields*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 210, Springer-Verlag, New York, 2002.
- [Sti09] H. STICHTENOTH – *Algebraic function fields and codes*, second éd., Graduate Texts in Mathematics, vol. 254, Springer-Verlag, Berlin, 2009.

18 août 2014

HUGUES BAUCHÈRE, Laboratoire de mathématiques Nicolas Oresme,
 CNRS UMR 6139, Université de Caen, Campus II, BP 5186, 14032
 Caen Cedex, France • *E-mail* : hugues.bauchere@unicaen.fr
Url : <http://www.math.unicaen.fr/~bauchere/>